وزارة التعليم العالي	الامتحان النهائي	الاسم
جامعة البعث	لمقرر تحليل (2)- السنة الأولى رياضيات	الدرجة 100
كلية العلوم	الفصل الثاني لعام 2016- 2017	المدة ساعة ونصف

عن الأسئلة التالية :

الأول (36 درجة) : (1) مستخدماً طريقة المكاملة بالتجزئة أوجد القانون التدريجي المناسب لحساب التكامل :

$$I_n = \int \cos^n x \, dx \qquad , n = 2,3,4, \ldots .$$

ثم أوجد التكامل : $I_4 = \int \cos^4 x \, dx$

(2) أوجد التكاملين الآتيين:

$$I = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx \qquad , \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \qquad ;$$

ال الثاني (30درجة) : احسب التكاملين الآتيين :

$$K = \int \frac{e^{2x} + 4e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 2}} dx \quad , \quad M = \int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx$$

ؤال الثالث (34درجة) : (أ) أدرس تقارب أو تباعد التكاملين المعتلين الآتيين :

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx \qquad , \quad I_3 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}$$

(ب) أوجد طول قوس واحد من المنحني المعطى بالمعادلات :

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad , 0 \le t \le 2\pi$$

انتهت الأسئلة

مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

استاذ المقرر

د. منير مخلوف

حمص في 8 /2017/6

جامعة البعث — سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل (٢)

كلية العلوم قسم الرياضيات — س ١ رياضيات

الفصل الثاني لعام $\frac{٢٠١٦}{٢٠١٧}$ — الدرجة : 100

جواب السؤال الأول : (١) لدينا

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx$$ 36

وبالمكاملة بالتجزئة حيث نفرض أن :

$$u = \cos^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\sin x)\,dx$$

$$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$$

فيكون :

$$I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x\,dx =$$

$$n I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} \quad ; \quad n = 2, 3, \ldots$$

ومنه نجد أن :

10

$$I_n = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad ; \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

وبشكل خاص إذا كان $n=1$ فإن :

$$I_1 = \int \cos x\,dx = \sin x + c.$$

الآن لإيجاد التكامل I_4 نطبق القانون السابق نحصل على :

$$I_4 = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4} I_2$$

ولكن :

$$I_2 = \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + \frac{1}{2} I_0 \quad ; \quad I_0 = \int dx = x + c$$

فإذن :

8

$$I_2 = \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + \frac{1}{2} x \Rightarrow$$

$$I_4 = \int \cos^4 x\,dx = \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{4} + \frac{3}{8}\sin x \cdot \cos x + \frac{3}{8} x + c$$

(2) بالنسبة للتكامل I يمكن إيجاده بطريقة التجزئة حيث نفرض أن :

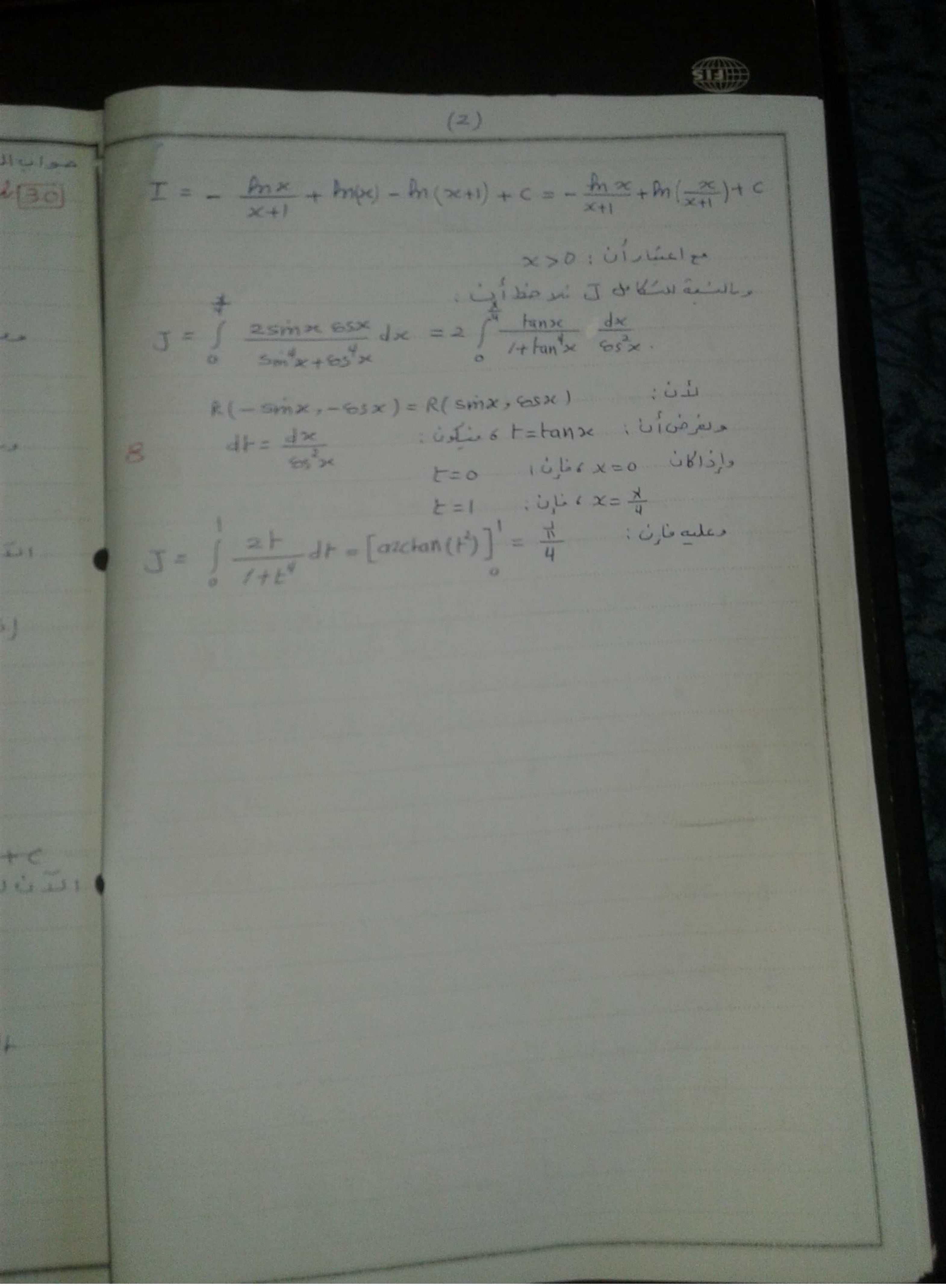
$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}$$

10

وبالتالي فإن :

$$I = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$



(2)

$$I = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1) + c = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + c$$

مع اعتبار أن : $x > 0$

وبالنسبة للتكامل J نلاحظ أن :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\tan^4 x}\,\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

لأن : $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

ونفرض أن : $t = \tan x$ ، فيكون : $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

8

وإذا كان $x = 0$ ، فإن : $t = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ ، فإن : $t = 1$

وعليه فإن :

$$J = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^4}\,dt = \left[\arctan(t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

السؤال الثاني: بالنسبة للتكامل K نلاحظ أنه نفرض أن:

$e^x = t \Rightarrow dt = e^x dx$

وبالتالي يؤول إلى التكامل:

$$K = \int \frac{t^2+4t}{\sqrt{t^2+t+2}} \frac{dt}{t} = \int \frac{t+4}{\sqrt{t^2+t+2}} dt$$

ومنه نستطيع أن نكتب:

$$K = A\sqrt{t^2+t+2} + \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+2}}$$

8 وباشتقاق العلاقة السابقة بالنسبة لـ t نجد:

$$\frac{t+4}{\sqrt{t^2+t+2}} = \frac{A(2t+1)}{2\sqrt{t^2+t+2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{t^2+t+2}}$$

الآن نضرب الطرفين بـ $\sqrt{t^2+t+2}$ والمطابقة نجد أن:

4 $A = 1$ و $\alpha = \frac{7}{2}$

إذن التكامل J هو:

$$J = \sqrt{t^2+t+2} + \frac{7}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+2}} =$$

$$J = \sqrt{t^2+t+2} + \frac{7}{2}\int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}} =$$

6 $$J = \sqrt{e^{2x}+e^x+2} + \frac{7}{2}\ln\left|(e^x+\frac{1}{2}) + \sqrt{e^{2x}+e^x+2}\right| + c$$

الآن لإيجاد التكامل M نلاحظ أن:

$m = 1$ و $n = \frac{2}{3}$ و $P = -\frac{1}{2}$ ، $\frac{m+1}{n} = 3 \in \mathbb{Z}$

وبالتالي نفرض أن:

$t = \sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$

أي: $t^2 = 1+x^{\frac{2}{3}}$ أي:

4 $x = (t^2-1)^{\frac{3}{2}}$ ، $dx = \frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}(2t)dt$ وبالتعويض نحصل على:

$$M = 3\int (t^2-1)^2 dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + c \Rightarrow$$

8 $$M = \frac{3}{5}(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}} - 2(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} + 3(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + C$$

جواب الثالث : (أ) لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل :

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$$

أربعة وثلاثون 34

نفرض أن :

$$u = \tan^{-1}x$$

$$dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \;;\; v = -\frac{1}{x}$$

وعليه فإن :

$$I_2 = -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\tan^{-1}x}{x}\Big|_1^b\right] + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}$$

ولكن :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}x}{x} = 0$$

ومنه :

10

$$I_2 = \frac{\pi}{4} + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}$$

ولدراسة تقارب أو تباعد الحد الثاني من العلاقة السابقة نفرض أن :

$$x = \frac{1}{t} \quad \text{أو} \quad t = \frac{1}{x}.$$

فيكون :

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln 2$$

فإذن التكامل I_2 متقارب

وقيمته تساوي :

$$I_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

ولدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل :

$$I_3 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{x^2-1}}$$

نلاحظ أنه يوجد للدالة المكاملة :

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^2-1}}$$

نقطة شاذة هي : $x = 1$ وطالما أن :

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^2-1}} = \frac{x^3}{\sqrt[4]{x+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}} \;;\; x\to 1+0$$

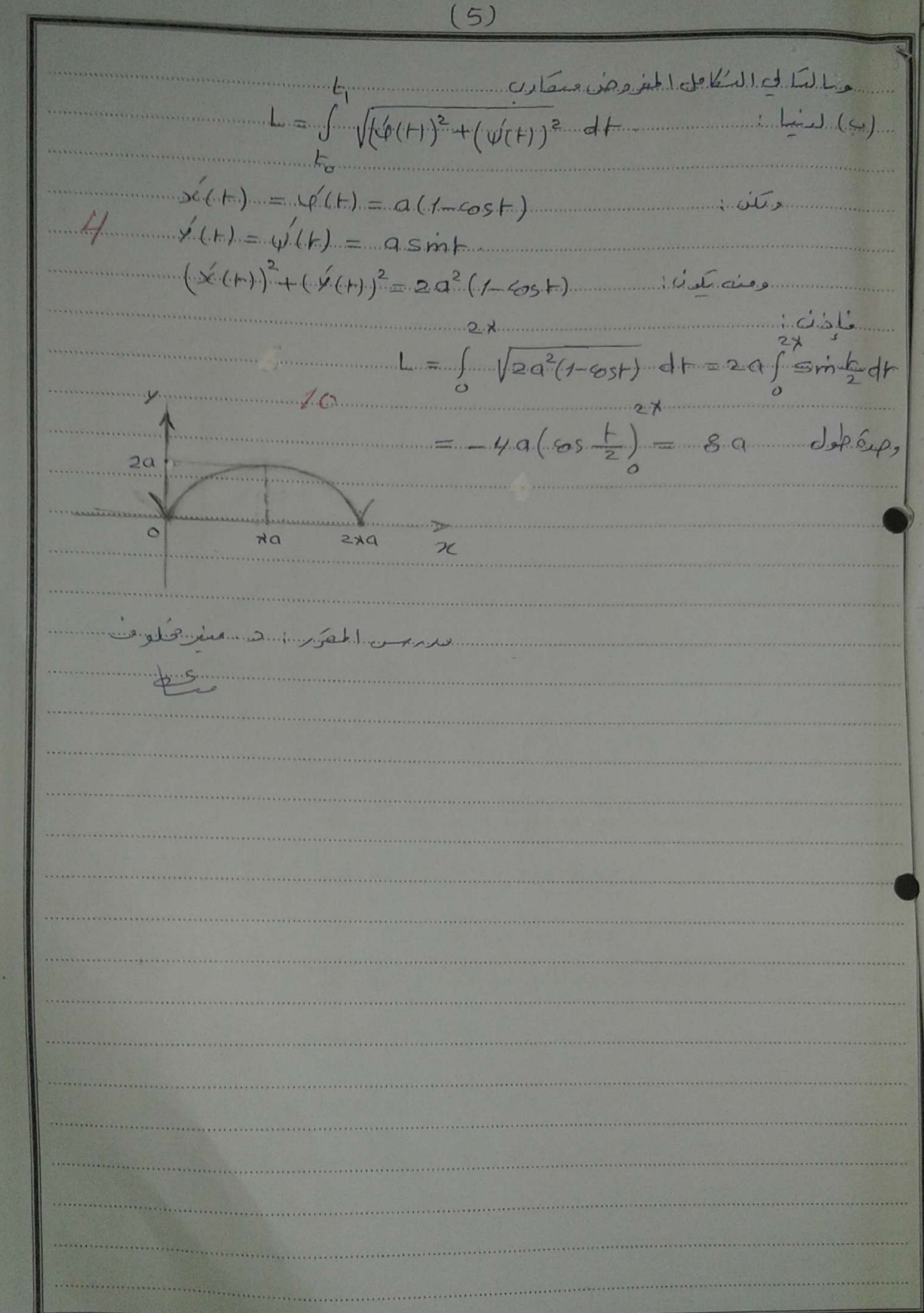
10

وبما أن التكامل :

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}$$

متقارب لأن :

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{3}\lim_{s\to 1+0}\left[(x-1)^{\frac{3}{4}}\Big|_s^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)$$



وبالتالي التكامل المفروض متقارب

(ب) لدينا :
$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$$

ولكن :
$$x'(t) = \varphi'(t) = a(1-\cos t)$$
$$y'(t) = \psi'(t) = a\sin t$$

4

ومنه يكون :
$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 2a^2(1-\cos t)$$

فإذن :
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt$$
$$= -4a\left(\cos\frac{t}{2}\right)_0^{2\pi} = 8a$$ وهو طول

10

مدرس المقرر : د. منير مخلوف